

From  $r\lambda^{-1}=94 \cdot 10^2$  the value of  $r$  could be determined as  $r=0.67 \cdot 10^{-4}$  cm. It remains to be proved that the basic condition of negligible primary extinction is fulfilled. In his paper, Zachariassen (1967) shows that, if  $r\lambda^{-1}Q\bar{t} < 0.02$ , the primary extinction becomes negligible. The only  $a$  set reflexions not satisfying this inequality are 011 and 022, for which the left hand side is calculated equal to 0.055 and 0.023 respectively using  $\bar{t}=\frac{2}{3}r=1.0 \cdot 10^{-4}$  cm. Since it can therefore be concluded that the large majority of reflexions from which  $g$  was determined satisfy the above mentioned inequality very well, it may be stated that the primary extinction is really negligible.

### References

- BURBANK, R. D. (1965). *Acta Cryst.* **19**, 957.  
 COPPENS, P., LEISEROWITZ, L. & RABINOVICH, D. (1965). *Acta Cryst.* **18**, 1035.  
 DESLATTES, R. D. (1969). *Acta Cryst.* **A25**, 89.  
 GANTZEL, P. K., SPARKS, R. A. & TRUEBLOOD, K. N. (1966). *I.U.Cr. World List of Crystallographic Computer Programs*. 2nd ed., Program 384.

- GOMES DE MESQUITA, A. H. (1967). *Acta Cryst.* **23**, 610.  
 JEFFERY, J. W. & WHITAKER, A. (1965). *Acta Cryst.* **19**, 963.  
 LONGO, J. M. & KIERKEGAARD, P. (1970). *Acta Chem. Scand.* **24**, 420.  
 MOON, R. M. & SHULL, C. G. (1964). *Acta Cryst.* **17**, 805.  
 POST, B. (1968). International Meeting on Accurate Determination of X-ray Intensities and Structure Factors, Cambridge, England. Paper C2.1. See also *Acta Cryst.* (1969). **A25**, 94.  
 SANTORO, A. & ZOCCHI, M. (1966). *Acta Cryst.* **21**, 293.  
 ZACHARIASEN, W. H. (1945). *Theory of X-ray Diffraction in Crystals*. New York: John Wiley.  
 ZACHARIASEN, W. H. (1963). *Acta Cryst.* **16**, 1139.  
 ZACHARIASEN, W. H. (1965). *Acta Cryst.* **18**, 705.  
 ZACHARIASEN, W. H. (1967). *Acta Cryst.* **23**, 558.  
 ZACHARIASEN, W. H. PLETTINGER, H.A. (1965). *Acta Cryst.* **18**, 710.  
 ZOCCHI, M. & SANTORO, A. (1967). *Acta Cryst.* **22**, 331.  
 ÅSBRINK, S., BRANDT, B. G. & KIERKEGAARD, P. (1969). *Acta Chem. Scand.* **23**, 2196.  
 ÅSBRINK, S. & WERNER, P.-E. (1966). *Acta Cryst.* **20**, 407.

*Acta Cryst.* (1970). **A26**, 390

## Quelques Cas d'Orthogonalité d'Ondes se Propageant dans des Milieux Non-Absorbants

PAR A. LEVELUT

*Laboratoire d'Ultrasons,\* Faculté des Sciences, Tour 13, 9 quai Saint Bernard, Paris 5e, France*

ET J. BILLARD

*Laboratoire de Physique des Milieux Cristallins† attaché à la Chaire de Physique Théorique du Collège de France, place Marcelin Berthelot, Paris 5e, France, et Département de Physique, Faculté des Sciences de Lille, BP 36, 59 Lille, France*

(Reçu le 9 décembre 1969)

For transparent media (homogeneous and twisted), orthogonality of the eigen-waves (elastic and electromagnetic) is examined. Particular attention is given to media with characteristic constants independent of frequency and to waves with the same wave-vector. Occurrences of orthogonality are presented.

### 1. Introduction

Dans les milieux homogènes, sauf cas exceptionnels (Khapalyuk, 1963), il existe des vibrations privilégiées qui se propagent en restant identiques à elles-mêmes. Et le problème de la propagation d'une onde plane homogène est résolu lorsque l'on connaît les vibrations privilégiées et leurs vitesses de propagation dans la direction considérée: il suffit de décomposer la vibration de l'onde plane sur les vibrations privilégiées. Ces dernières sont au nombre de deux pour les ondes électromagnétiques et de trois pour les ondes élas-

tiques; dans le cas le moins restrictif (milieu anisotrope et actif), elles sont elliptiques.

Pour les ondes électromagnétiques, Airy (1831) posa l'hypothèse suivante, relative aux composantes transversales du champ électrique des vibrations privilégiées de même fréquence:

- leurs axes principaux de même nom sont perpendiculaires,
- leurs sens de parcours sont opposés,
- leurs ellipticités sont égales.

De telles vibrations sont dites orthogonales.

Cette hypothèse est encore généralement admise. Elle n'est pas remise en cause par les mesures insuffisamment fines effectuées jusqu'à ce jour sur les cristaux. Toutefois, quelques auteurs (de Mallemann, 1924; Bil-

\* Equipe associée au CNRS.

† Laboratoire associé au CNRS.

lard, 1966, 1967) ont mis en doute ses fondements théoriques.

Pour les ondes élastiques se propageant dans un milieu sans absorption, dans les directions où une onde rectiligne existe, les deux autres vibrations sont des ellipses contenues dans le plan perpendiculaire à la première vibration; le phénomène présente donc une analogie formelle avec le cas électromagnétique. Cependant, à la différence de ce dernier, où l'activité optique est un fait connu et étudié depuis Arago (1811), l'activité acoustique n'a pu encore être mise en évidence par des expériences de propagation ultrasonore (Portugal & Burstein, 1968). C'est dire que la question de savoir si l'hypothèse d'Airy est valable ou non pour les ondes élastiques ne s'est pas posée jusqu'à présent.

Dans les milieux possédant une torsion (par exemple dans les cholestériques ou les nématiques hélicoïdaux) il n'y a pas de vibrations privilégiées, mais, pour certaines directions de propagation, il existe des vibrations favorisées (Mauguin, 1911) qui présentent, en tout point, le même état de polarisation par rapport au milieu. Et dans ce cas, il a été montré (Billard, 1965), au moyen d'une lame nématique hélicoïdale, que l'expérience infirmait l'hypothèse d'Airy.

L'objet du présent article est l'étude théorique des propriétés de certaines ondes planes et homogènes: ondes élastiques lorsqu'une des vibrations est rectiligne et ondes électromagnétiques. Son but est de montrer que si l'hypothèse d'Airy, qui s'applique aux ondes privilégiées de *même fréquence*, est généralement inexacte, en revanche, les ondes privilégiées de *même longueur d'onde*, sont, avec les restrictions qui seront indiquées, orthogonales.

Le plan est le suivant. Le problème de la recherche des vibrations privilégiées ou favorisées est d'abord examiné d'un point de vue assez général; l'hypothèse d'un milieu non-absorbant y apporte quelque simplification en entraînant l'hermiticité de certaines matrices (§ 2). Cette étude est appliquée ensuite aux milieux homogènes (§ 3) puis à un cas particulier des milieux à torsion constante (§ 4).

## 2. Propriétés générales

La composante sur l'axe d'indice  $j$  d'un vecteur lié à une onde privilégiée ou favorisée est de la forme

$$v_j(\mathbf{r}, t) = V_j e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} + V_j^* e^{-i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} \quad (j=1, 2, 3) \quad (2-1)$$

où les  $V_j$  sont des nombres complexes indépendants de  $\mathbf{r}$  et de  $t$ . Dans la suite le deuxième terme, complexe conjugué du premier, est toujours sous-entendu. Si le milieu est non-absorbant l'amplitude de l'onde ne dépend pas de  $\mathbf{r}$ ;  $\mathbf{K}$  est donc réel. La recherche des vibrations privilégiées ou favorisées consiste, d'une part, à établir quelle relation nécessaire  $f(\omega, \mathbf{K})=0$  existe entre la pulsation  $\omega$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  et, d'autre part, à déterminer les nombres  $V_j$  correspondant à  $\omega$  et  $\mathbf{K}$  liés par la relation précédente.

Les grandeurs  $v_j$  intéressantes ici sont les composantes du déplacement élastique, ou bien les composantes des champs ou des inductions. Dans l'un et l'autre cas, le comportement de ces grandeurs est régi par trois types d'équations:

(a) des équations fondamentales, comme les équations de d'Alembert ou le groupe de Maxwell;

(b) des équations relatives à la matière, telle la loi de Hooke généralisée ou les relations entre inductions et champs;

(c) éventuellement des relations annexes, comme celle reliant le déplacement élastique à la déformation  $S_{\alpha\beta}$ .

S'il existe une relation linéaire entre les composantes des grandeurs  $\vec{X}(\mathbf{r}, t)$  et  $\vec{Z}(\mathbf{r}, t)$ , définies dans un milieu homogène et stationnaire, les équations de matière prennent la forme générale

$$Z_i(\mathbf{r}, t) = \sum_j \alpha_{ij}(\mathbf{r}, t) * X_j(\mathbf{r}, t) \quad (2-2)$$

où le produit de convolution porte sur les quatre variables  $x, y, z$  et  $t$ . Les indices  $i$  et  $j$  représentent des ensembles ordonnés d'indices, ce qui fait que la relation (2-2) est valable pour toutes grandeurs tensorielles.

Le tenseur  $\bar{\alpha}(\mathbf{r}, t)$  et sa transformée de Fourier  $\bar{\alpha}(\mathbf{K}, \omega)$  définie par

$$\alpha_{ij}(\mathbf{K}, \omega) = \iiint \alpha_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} d^3r dt \quad (2-3)$$

sont appelés tenseurs de susceptibilité généralisée (Landau & Lifchitz, 1967). Parmi les propriétés de  $\bar{\alpha}$ , la plus utile est son hermiticité lorsque le milieu est non-absorbant:  $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}^*$ .

Les milieux hétérogènes sont plus complexes; un exemple en est donné plus loin avec les milieux à torsion constante.

La conjonction des trois types d'équations permet d'écrire les équations d'évolution du vecteur complexe  $V$  de composantes  $V_j$ . Que ce soit pour les ondes ultrasonores ou pour les ondes électromagnétiques, il est possible d'aboutir à l'égalité d'une dérivée seconde par rapport au temps et d'une combinaison linéaire, où interviennent les coefficients  $\alpha_{ij}$ , de dérivées secondes par rapport aux variables d'espace. Il vient donc, en tenant compte de la forme de l'équation (2-1):

$$\omega^2 V_i = \sum_j d_{ij}(\mathbf{K}, \omega) V_j \quad (2-4)$$

$$\omega^2 \mathbf{V} = \mathcal{D}(\mathbf{K}, \omega) \mathbf{V}. \quad (2-4')$$

Une des ondes élastiques est supposée rectiligne; en prenant la direction de cette vibration comme axe  $Ox_3$ , la matrice  $\mathcal{D}$  prend donc la forme

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{vmatrix}.$$

Les ondes d'induction sont perpendiculaires au vecteur d'onde; en choisissant  $Ox_3$  parallèle à  $\mathbf{K}$ , il vient:

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \quad \left. \begin{array}{l} \text{(déformation),} \\ \text{(tension),} \\ \text{(constante élastique)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_j = \varepsilon_{\gamma\delta} \\ Z_i = T_{\alpha\beta} \\ \alpha_{ij} = c_{\alpha\beta\gamma\delta} . \end{array} \quad (3-1)$$

Dans les deux cas, les matrices utiles sont donc des matrices (2×2) et dans la suite nous poserons:

$$\mathcal{D}' = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} .$$

Les coefficients  $d_{ij}(\mathbf{K}, \omega)$  de la matrice dynamique sont fonctions des composantes de  $\mathbf{K}$ , d'une part à cause de la dépendance explicite des  $\alpha_{ij}(\mathbf{K}, \omega)$  et d'autre part à cause des dérivations spatiales; au contraire, la dépendance en  $\omega$  a pour seule origine la dépendance explicite des susceptibilités généralisées.

Pour chaque vecteur  $\mathbf{K}$ , il faut alors résoudre un problème de valeurs et de vecteurs propres. Le vecteur  $\mathbf{K}$  et la pulsation  $\omega$  ne sont pas indépendants; ils doivent satisfaire à l'équation de compatibilité:

$$f(\mathbf{K}, \omega) = \det |\mathcal{D}'(\mathbf{K}, \omega) - \omega^2 I| = 0 \quad (2-5)$$

où  $I$  est la matrice unité.

Les vecteurs propres relatifs à différentes valeurs propres  $\omega^2$  correspondent à des matrices  $\mathcal{D}'(\mathbf{K}, \omega)$  différentes; il n'y a en général pas de relations simples entre eux et l'hypothèse d'Airy n'est pas fondée.

Si la matrice  $\mathcal{D}'(\mathbf{K}, \omega)$  est indépendante de  $\omega$ , les différents vecteurs propres sont relatifs à une même matrice  $\mathcal{D}'(\mathbf{K})$ . Il peut, dans ce cas, y avoir des relations simples entre eux. Ainsi, l'hermiticité de  $\mathcal{D}'(\mathbf{K})$  entraîne leur orthogonalité (au sens du produit hermitique); il en résulte l'orthogonalité des vibrations privilégiées. Cette hermiticité est nécessaire [voir Appendice (1)].

Enfin, il est suffisant, pour que la matrice dynamique soit indépendante de  $\omega$ , que les susceptibilités généralisées soient, elles aussi, indépendantes de  $\omega$ . Ceci est réalisé, si elles sont de la forme

$$\alpha_{ij}(\mathbf{r}, t) = f_{ij}(\mathbf{r})\delta(t)$$

c'est-à-dire si la valeur de  $Z_i(\mathbf{r}, t)$  ne dépend que de celles des  $X_j(\mathbf{r}, t)$  au même instant. Il en est ainsi pour les équations de Gibbs (1882) qui rendent compte du pouvoir rotatoire naturel:

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j + \sum_{j,k} \gamma_{ijk} \partial_{x_k} E_j \quad (2-6)$$

si les coefficients  $\varepsilon_{ij}$  et  $\gamma_{ijk}$  sont des constantes indépendantes de la fréquence.

La même situation se retrouve pour la théorie de l'activité acoustique (Portugal & Burstein, 1968).

### 3. Ondes dans les milieux homogènes

#### 1. Ondes élastiques

Les considérations précédentes s'appliquent immédiatement en posant:

L'évolution des composantes du déplacement

$$u_\alpha(\mathbf{r}, t) = U_\alpha e^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} \quad (3-2)$$

est gouvernée par les équations suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} \rho \partial_t^2 u_\alpha = \sum_\beta \partial_{x_\beta} T_{\alpha\beta} \\ T_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta\gamma\delta} * S_{\gamma\delta} \\ S_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} (\partial_{x_\delta} u_\gamma + \partial_{x_\gamma} u_\delta) . \end{array} \right\} (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3) \quad (3-3)$$

D'un calcul, dont la forme est classique en élasticité cristalline, il découle que les composantes  $U_\alpha$  des vibrations privilégiées doivent satisfaire aux équations:

$$\omega^2 U_\alpha = \sum_\gamma \Delta_{\alpha\gamma} U_\gamma . \quad (3-4)$$

Il a été posé

$$\Delta_{\alpha\gamma} = \frac{1}{\rho} \sum_{\beta\delta} c_{\alpha\beta\gamma\delta} K_\beta K_\delta \quad (3-5)$$

et l'hermiticité de  $c_{ij} = c_{\alpha\beta\gamma\delta}$  entraîne celle de  $\Delta_{\alpha\gamma}$ .

Si la matrice dynamique  $\Delta(\mathbf{K}, \omega)$  est indépendante de  $\omega$ , les trois vecteurs propres relatifs au même vecteur d'onde sont orthogonaux; ceci n'a en général aucune signification géométrique particulière. Si, en plus, l'une des vibrations est rectiligne les propriétés d'orthogonalité entraînent que les deux autres vibrations sont coplanaires. Et, alors le théorème précédent s'applique. Cette éventualité d'une onde rectiligne se produit au moins dans les cas suivants:

(a) Le vecteur d'onde est parallèle à un axe d'ordre 2, 3, 4 ou 6; la vibration rectiligne est purement longitudinale.

(b) Le vecteur d'onde est dans un miroir; la vibration rectiligne est alors la vibration purement transversale perpendiculaire au miroir.

#### 2. Ondes électromagnétiques

Ici les équations fondamentales sont celles de Maxwell.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3-6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D} \quad (3-7)$$

et les équations relatives à la matière sont

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) * \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mu}(\mathbf{r}, t) * \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{array} \right\} \quad (3-8)$$

ou encore

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r}(\mathbf{r}, t) * \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = m(\mathbf{r}, t) * \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) . \end{array} \right\} \quad (3-8')$$

Les équations intrinsèques de propagation se déduisent des précédentes

$$\partial_t^2 \mathbf{D} = \operatorname{rot} \partial_t \mathbf{H} = \operatorname{rot} (m * \partial_t \mathbf{B}) = -\operatorname{rot} (\bar{m} * \operatorname{rot} \mathbf{E})$$

$$= -\operatorname{rot} [m * \operatorname{rot} (\bar{\varepsilon} * \mathbf{D})] . \quad (3-9)$$

De même  $\partial_t^2 \mathbf{B} = -\text{rot} [\bar{\epsilon} * \text{rot} (m * \mathbf{B})]$ .

Si l'axe  $Ox_3$  est choisi parallèle à  $\mathbf{K}$  il vient

$$D_3=0, B_3=0 \quad (3-10)$$

et les matrices  $\mathcal{D}'_e$  et  $\mathcal{D}'_m$  ont la forme indiquée dans l'Appendice (2).

Dans cette hypothèse l'une des relation (3-7) s'écrit

$$\partial_t \mathbf{D} = -i\mathbf{K} \times \mathbf{H}$$

d'où

$$\frac{D_2}{D_1} = -\frac{H_1}{H_2}$$

ou

$$\frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{H_2}{H_1} = -1 \quad (3-11)$$

et

$$\frac{B_2}{B_1} \cdot \frac{E_2}{E_1} = -1 \quad (3-11')$$

Si  $\mathbf{H}_T$  est le champ magnétique transversal complexe la relation (3-11) montre que  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}_T$  correspondent à des vibrations de même ellipticité et parcourues dans le même sens. Le résultat est identique pour  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}_T$ .

Le Corre (1957) en déduit, pour les milieux dénués de gyroélectricité et de gyromagnétisme, que les inductions privilégiées des ondes de même fréquence sont deux ou deux des vibrations elliptiques semblables mais parcourues dans des sens différents.

Si  $m$  et  $\bar{\epsilon}$  prennent chacun la même valeur pour deux ondes de même vecteur d'onde les relations (3-11) sont vérifiées même si le milieu possède des propriétés gyroélectriques ou (et) gyromagnétiques.

Si le milieu ne présente ni gyromagnétisme ni anisotropie magnétique aux fréquences considérées  $m = mI$  et  $\mathcal{D}'_e$  ainsi que  $\mathcal{D}'_m$  se réduisent à une matrice hermitique. Les inductions privilégiées, et par suite les champs transversaux des ondes de même longueur d'onde sont orthogonaux dans les milieux où l'anisotropie magnétique et le gyromagnétisme peuvent être négligés.

La condition précédente est communément admise en optique, en supposant

$$\bar{\mu} \simeq \mu I \quad (\text{d'où } m \simeq mI).$$

Si les équations relatives à la matière font figurer des fonctions quelconques de  $\mathbf{K}$ , l'orthogonalité ne peut être vérifiée que pour des ondes d'orientations particulières. En effet, une onde ayant un vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  est représentée par un point  $K$  de l'espace réciproque ne possédant pas d'éléments de symétrie, les deux matrices  $\bar{m}$  et  $\bar{\epsilon}$  sont quelconques et l'hermiticité de  $\mathcal{D}'$  n'est, en général, pas satisfaite.

En réalité, les écarts à l'orthogonalité des champs considérés sont faibles (Billard, 1966). Des écarts importants seraient à rechercher dans les milieux absorbants.

#### 4. Ondes dans les milieux hélicoïdaux

A la suite de la découverte, puis de l'étude expérimentale de préparations nématiques à torsion, quelques auteurs se sont penchés sur le problème de la propagation des ondes lumineuses dans de tels matériaux transparents (Mauguin, 1911; Born & Strumpf, 1916; Oseen, 1937; de Vries, 1951). Ainsi il a été montré que, lorsque le vecteur d'onde est parallèle à l'axe hélicoïdal, il peut se propager deux vibrations elliptiques dites favorisées, dont l'état de polarisation est partout le même par rapport au milieu.

Ce problème est repris, ici, avec mention particulière des états de polarisation. La question de la propagation des ondes élastiques dans des milieux possédant les mêmes symétries est aussi examinée.

##### 1. Généralités

Les propriétés admises pour le milieu sont les suivantes:

(a) La symétrie locale est par exemple holoèdre orthorhombique ou quadratique pour que les tenseurs relatifs à la matière soient diagonaux;

(b) Ces tenseurs sont sans dispersion, c'est-à-dire indépendants de  $\omega$  et de  $\mathbf{K}$ ;

(c) L'axe de torsion est l'un des axes binaires.

Seules sont considérées les ondes dont le vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  est parallèle à l'axe hélicoïdal.

Les systèmes d'axes utilisés sont:

$O'x'y'z'$  liés aux axes de symétrie locaux,

$Oxyz$  l'un d'entre eux, qui permet de repérer les autres.

$Oz$  et  $O'z'$  sont parallèles à l'axe de torsion;  $O'x'$  et  $O'y'$  font avec  $Ox$  et  $Oy$  un angle  $\varphi = qz$  où  $q = 2\pi/p$ ,  $p$  étant le pas de l'hélice.

Les équations fondamentales sont écrites par rapport au système  $Oxyz$ , tandis que  $O'x'y'z'$  est utilisé pour exprimer simplement les équations relatives à la matière et pour indiquer la forme explicite des vibrations favorisées

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}'_0 \exp i(\omega t - Kz).$$

Les ondes d'inductions électrique et magnétique sont transversales; il en est de même pour les champs à cause de la symétrie admise. Pour les ondes élastiques, une des vibrations est longitudinale; elle est insensible à la torsion du milieu et ne subit aucune réflexion sélective lorsque l'on change sa fréquence. Les deux autres ondes sont purement transversales. Dans les deux cas, il existe donc deux ondes transversales dont les propriétés sont étudiées.

Seules interviennent les composantes perpendiculaires à  $Oz$  des vecteurs inductions et champs électriques et magnétiques, du vecteur déplacement élastique, ainsi que certaines composantes des tenseurs déformation ( $S_{31} = S_5$  et  $S_{32} = S_4$ ) et tension ( $T_{31} = T_5$  et  $T_{32} = T_4$ ). Dans le changement d'axes  $Oxyz \rightarrow O'x'y'z'$ , tous ces couples de composantes se transforment de la même manière. Par exemple

$$\begin{cases} D_1 = D_1 \cos \varphi + D_2 \sin \varphi \\ D_2 = -D_1 \sin \varphi + D_2 \cos \varphi \end{cases} \quad (4-1)$$

et

$$\begin{cases} T'_5 = T_5 \cos \varphi + T_4 \sin \varphi \\ T'_4 = -T_5 \sin \varphi + T_4 \cos \varphi \end{cases} \quad (4-2)$$

Dans la suite, les 'vecteurs'

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_5 \\ T_4 \end{pmatrix}$$

se transforment ainsi

$$\mathbf{D}' = \bar{R}^{-1} \mathbf{D} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}' = \bar{R}^{-1} \mathbf{T}$$

avec  $\bar{R} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$  (4-3)

Et les équations relatives à la matière sont, dans le référentiel  $O'x'y'z'$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}' &= \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \mathbf{D}' = \bar{e} \mathbf{D}' , \\ \mathbf{H}' &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \mathbf{B}' = \bar{m} \mathbf{B}' , \\ \mathbf{T}' &= 2 \begin{pmatrix} c_{55} & 0 \\ 0 & c_{44} \end{pmatrix} \mathbf{S}' = 2\bar{c} \mathbf{S}' . \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

Les ondes élastiques et les ondes électromagnétiques possèdent des points communs. Par exemple, elles présentent toutes les deux le phénomène de réflexion sélective d'une des vibrations dans une bande de fréquence. Du point de vue des états de polarisation, au contraire, les ondes élastiques sont plus simples que les ondes lumineuses.

## 2. Ondes élastiques

L'équation de d'Alembert peut s'écrire

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = \partial_z \mathbf{T} . \quad (4-5)$$

Compte tenu de

$$\mathbf{u} = \bar{R} \mathbf{u}' , \quad \mathbf{S} = \bar{R} \mathbf{S}' , \quad \mathbf{T} = \bar{R} \mathbf{T}'$$

et de

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \partial_z \mathbf{u} , \quad \mathbf{T}' = 2\bar{c} \mathbf{S}'$$

elle devient

$$-\rho \omega^2 \bar{R} \mathbf{u}' = \partial_z [\bar{R} \bar{c} \bar{R}^{-1} \partial_z (\bar{R} \mathbf{u}')] ]$$

soit

$$\rho \omega^2 \mathbf{u}' = [(K^2 + q^2) \bar{c} - \bar{c} \partial_z \bar{R}^{-1} \partial_z \bar{R} - \bar{R}^{-1} \partial_z \bar{R} \bar{c} \bar{R}^{-1} \partial_z \bar{R} + iK(\bar{R}^{-1} \partial_z \bar{R} \bar{c} + \bar{c} \bar{R}^{-1} \partial_z \bar{R})] \mathbf{u}' .$$

Or,

$$\bar{R}^{-1} \partial_z \bar{R} = q \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = qM$$

et

$$\partial_z \bar{R}^{-1} \partial_z \bar{R} = q^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

D'où

$$\rho \omega^2 \mathbf{u}' = [K^2 \bar{c} - q^2 \bar{M} \bar{c} \bar{M} + iKq(\bar{M} \bar{c} + \bar{c} \bar{M})] \mathbf{u}' .$$

Et finalement, il vient

$$\begin{vmatrix} K^2 c_{55} + q^2 c_{44} & -iKq(c_{44} + c_{55}) \\ iKq(c_{44} + c_{55}) & K^2 c_{44} + q^2 c_{55} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{vmatrix} = \rho \omega^2 \begin{vmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{vmatrix} \quad (4-6)$$

La matrice dynamique est hermitique. A même vecteur d'onde, les deux vibrations, qui sont elliptiques, sont orthogonales.

Cette étude peut s'appliquer, entre autre, à des stases mésomorphes suffisamment rigides: cholestériques (Sackmann, Meiboom, Snyder, Meixner & Dierz, 1968) ou solutions d'un corps chiral dans un nématique (Chistyakov & Vainshtein, 1963; Chistyakov, 1964; Penot, Jacques & Billard, 1968), à des cristaux possédant une torsion spontanée (Michel-Lévy, 1892; Gaubert, 1918) et à des cristaux auxquels une torsion a été appliquée. Dans ce dernier cas, des expériences ont été effectuées par Aleksandrov & Khaimov-Mal'kov (1956) sur des cristaux de chlorure de sodium tordus autour d'un axe binaire. Ces auteurs ont mis en évidence la rotation de la polarisation mais n'ont pas étudié l'ellipticité des vibrations, qui, d'ailleurs, devait être très faible.

## 3. Ondes électromagnétiques

Les équations (3-7) peuvent s'écrire respectivement

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \mathbf{D} &= \partial_z \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{H} = \partial_z (\bar{M} \mathbf{H}) \\ \partial_t \mathbf{B} &= \partial_z (\bar{M} \mathbf{E}) \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

De ces deux équations, et de

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \bar{R} \mathbf{D}' , \quad \mathbf{E} = \bar{R} \mathbf{E}' , \\ \mathbf{E}' &= \bar{e} \mathbf{D}' , \quad \mathbf{H}' = \bar{m} \mathbf{B}' , \end{aligned}$$

se déduit:

$$\begin{aligned} i\omega \mathbf{D}' &= (\bar{R}^{-1} \bar{M} \partial_z \bar{R} - iK \bar{R}) \mathbf{H}' \\ i\omega \mathbf{B}' &= -(\bar{R}^{-1} \bar{M} \partial_z \bar{R} - iK \bar{R}) \mathbf{E}' . \end{aligned}$$

D'où:

$$i\omega \mathbf{D}' = - \begin{vmatrix} q & -iK \\ iK & q \end{vmatrix} \mathbf{H}'$$

$$i\omega\mathbf{B}' = \begin{vmatrix} q & -iK \\ iK & q \end{vmatrix} \mathbf{E}'.$$

Finalement il vient

$$\begin{vmatrix} (q^2 m_1 + K^2 m_2) e_1 & -iKq(m_1 + m_2) e_2 \\ iKq(m_1 + m_2) e_1 & (q^2 m_2 + K^2 m_1) e_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D'_1 \\ D'_2 \end{vmatrix} = \omega^2 \begin{vmatrix} D'_1 \\ D'_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (q^2 e_1 + K^2 e_2) m_1 & -iKq(e_1 + e_2) m_2 \\ iKq(e_1 + e_2) m_1 & (q^2 e_2 + K^2 e_1) m_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B'_1 \\ B'_2 \end{vmatrix} = \omega^2 \begin{vmatrix} B'_1 \\ B'_2 \end{vmatrix}$$

La condition d'orthogonalité des vibrations électriques (aussi bien induction que champ) est:  $e_1 = e_2$  (isotropie diélectrique). Pour que les ondes favorisées (elliptiques) soient définies dans ce cas, il faudrait une anisotropie magnétique.

Pour les vibrations magnétiques la condition est:  $m_1 = m_2$  (isotropie magnétique); elle est souvent réalisée avec une bonne approximation.

L'écart à l'orthogonalité est, toutes choses égales par ailleurs, d'autant plus grand que plus grande est la différence des fréquences qui conduisent à des longueurs d'onde égales ou encore que plus grande est la biréfringence à une fréquence donnée. Cette remarque est également valable pour les milieux homogènes.

Les relations simples entre les vibrations  $\mathbf{B}'$  et  $\mathbf{E}'$  (ici égal à  $\mathbf{E}_T$ ) signalée pour les milieux homogènes, n'existent pas pour les milieux hélicoïdaux.

Ces résultats sont applicables en particulier aux exemples déjà cités pour les ondes élastiques mais ici aucune restriction n'est à formuler pour la viscosité des mésomorphes.

### 5. Conclusion

Le problème de l'orthogonalité des vibrations privilégiées élastiques ou électromagnétiques, se propageant dans un milieu sans absorption a été examiné. L'hypothèse d'Airy (orthogonalité des vibrations privilégiées de même fréquence) n'est rigoureusement juste que dans des cas particuliers.

Si les équations relatives à la matière sont indépendantes de la fréquence (ou du temps) des résultats nouveaux apparaissent pour les vibrations de même longueur d'onde:

Les vibrations élastiques sont orthogonales,

les vibrations électromagnétiques sont orthogonales si l'un des deux tenseurs  $\bar{\epsilon}$  ou  $\bar{\mu}$  est isotrope et elles le sont presque si l'anisotropie magnétique est faible.

Pour les milieux possédant une torsion, les vibrations favorisées élastiques de même vecteur d'onde sont orthogonales; les vibrations électriques ne le sont pas et les vibrations magnétiques ne le sont que dans la mesure où  $\bar{\mu}$  est isotrope.

Si le milieu est absorbant, les tenseurs ne sont pas hermitiques. La plupart des résultats énoncés cessent d'être vrais.

### APPENDICE

(1) Il existe une transformation unitaire qui rend  $\mathcal{D}'$  triangulaire. Si les valeurs propres sont égales, il n'existe qu'un seul vecteur propre; si elles sont différentes, l'orthogonalité impose la diagonalité. La transparence impose leur réalité d'où l'hermiticité.

(2) La matrice dynamique  $\mathcal{D}'_e$  relative aux variables électriques est

$$\mathcal{D}'_e = K^2 \begin{vmatrix} m_{22}e_{11} - m_{21}e_{21} & m_{22}e_{12} - m_{21}e_{22} \\ m_{11}e_{21} - m_{12}e_{11} & m_{11}e_{22} - m_{12}e_{12} \end{vmatrix}.$$

La matrice  $\mathcal{D}'_e$  s'obtient en permutant les  $e_{ij}$  et les  $m_{ij}$ . L'hermiticité de  $\mathcal{D}'_e$  calculée à partir des sous-matrices  $(2 \times 2)$   $\bar{m}'$  et  $\bar{\epsilon}'$  ( $i, j = 1$  ou  $2$ ), elles-mêmes hermitiques impose que ces deux sous-matrices commutent, c'est-à-dire qu'elles possèdent les mêmes axes de diagonalisation. Alors la condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité est commune aux inductions électrique et magnétique privilégiées (et par suite aux champs magnétique et électrique transversaux).

### References

- AIRY, G. B. (1833). *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **4**, 79, 199.  
 ALEKSANDROV, K. S. & KHAIMOV-MAL'KOV, V. YA. (1956). *Soviet Phys. Crystall.* **1**, 292.  
 ARAGO, F. (1811). *Mém. de la Classe des Sciences math. et phys. de l'Institut impérial de France.* **1-12**, 93.  
 BILLARD, J. (1965). *C.R. Acad. Sci. Paris.* **261**, 939.  
 BILLARD, J. (1966). Thèse, Paris.  
 BILLARD, J. (1967). *Mol. Cryst.* **3**, 227.  
 BORN, M. & STUMPF, F. (1916). *Sitz. kön. preuss. Akad. Wiss.* p. 1043.  
 CHISTYAKOV, I. G. & VAINSHTEIN, B. K. (1963). *Soviet Phys. Crystall.* **8**, 458.  
 CHISTYAKOV, I. G. (1964). *J. Structural Chem.* **5**, 507.  
 GAUBERT, P. (1918). *Bull. Soc. fr. Minér.* **41**, 198.  
 GIBBS, J. W. (1882). *Amer. J. Science*, III-**23**, 460.  
 KHAPALYUK, A. P. (1963). *Soviet Phys. Crystall.* **7**, 588.  
 LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. (1967). *Physique Statistique*. Moscou: Editions Mir.  
 LE CORRE, Y. (1957). *J. Phys.* **18**, 312.  
 MALLEMANN, R. DE (1924). *Annales Phys.* **X2**, 5.  
 MICHEL-LÉVY, A. (1892). *Bull. Soc. fr. Minér.* **15**, 159.  
 MAUGUIN, CH. (1911). *Bull. Soc. fr. Minér.* **34**, 71.  
 OSEEN, C. W. (1937). *Ark. Mat., Astr. Fys.* **26A** No. 5.  
 PENOT, J. P., JACQUES, J. & BILLARD, J. (1968). *Tetrahedron Letters* No. 37, 4013.  
 PORTIGAL, D. R. & BURSTEIN, E. (1968). *Phys. Rev.* **170**, 673.  
 SACKMANN, E., MEIBOOM, S., SNYDER, L. C., MEIXNER, A. E. & DIETZ, R. E. (1968). *J. Amer. Chem. Soc.* **90**, 3567.  
 VRIES, H. DE (1951). *Acta Cryst.* **4**, 219.